

Résumé Cours sur les nombres complexes (Partie 2)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES(2)

G) arguments et interpretations geometriques

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé

$(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ et Soient M et M' et A, B, C et D quatre points

distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

$$1) (\overline{OM}; \overline{OM'}) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right) [2\pi]$$

$$2) (\overline{e_1}; \overline{AB}) \equiv \arg(b-a) [2\pi]$$

$$3) (\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi]$$

$$4) (\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi]$$

5) $A(a), B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

6) $A(a), B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$

$$(\overline{AB}) \parallel (\overline{CD}) \text{ si et seulement si : } \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\text{Ou } \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi [2\pi]$$

$$7) (\overline{AB}) \perp (\overline{CD}) \text{ ssi : } \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

8) Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC , le point

D appartient au cercle (C)

si et seulement si :

$$(\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv (\overline{DB}; \overline{DC}) [2\pi] \text{ ou } (\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \pi - (\overline{DB}; \overline{DC}) [2\pi]$$

9) Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$$

H) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE

NON NUL : 1) Soit θ un réel on pose : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta} \text{ Cette écriture s'appelle la}$$

forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

$$a) zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad b) z^n = r^n e^{in\theta} \quad c) \frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$$

$$d) \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')} \quad e) \bar{z} = re^{-i\theta} \quad f) -z = re^{i(\pi+\theta)}$$

g) Pour tout réel θ on a : $(re^{i\theta})^n = (r)^n re^{in\theta}$

$$d'où : (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

(Formule de Moivre)

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme

trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

I) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS C :

1) Les équations de second degré

Soit dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le

$$\text{complexe } z = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les

$$\text{complexes } z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{où } \delta \text{ une racine}$$

carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines

$$\text{complexes conjugué } z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

J) LES RACINES n-EME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ième de l'unité :

a) On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe u qui

vérifie : $u^n = 1$

b) L'unité admet n racines n-ème qui s'écrivent de la forme :

$$u_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad \text{Où } k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Le nombre complexe non nul $a = re^{\theta i}$ admet n racines n

-ème ($n \in \mathbb{N}^*$) différentes qui sont :

$$u_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}i} \quad \text{où } k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

K) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 tel que :

$$aff(\vec{u}) = a ; \text{ la Translation } t_{\vec{u}} \text{ transforme } M(z) \text{ en } M'(z')$$

si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation

$$t_{\vec{u}} \text{ de vecteur } \vec{u} \text{ tel que } aff(\vec{u}) = a$$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k , admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = kz + \omega(1 - k)$$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega)e^{\theta i} + \omega$$

L) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z' = az + b ; b \in \mathbb{C}$

1er cas: $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2eme cas: $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = z + b$

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur \vec{u} tel que : $aff(\vec{u}) = b$

3ème cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$$

Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a : Le point $\Omega(\omega)$ est un point invariant

par f et on a : $z' - \omega = a(z - \omega)$ qui se traduit par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = a \overrightarrow{\Omega M} \quad \text{donc : } f \text{ est l'homothétie de centre } \Omega(\omega) \text{ et}$$

de rapport a où $\omega = \frac{b}{1-a}$

4ème cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

$\omega = \frac{b}{1-a}$ on a : $\Omega(\omega)$ est un point invariant par f .

On pose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

$z' - \omega = a(z - \omega)$ la transformation f est la rotation de

centre $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$ et d'angle α .

5me cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en

$M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation

R et de l'homothétie $h ; f = h \circ R$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a) [2\pi]$ et de centre

$$\Omega(\omega) \text{ où } \omega = \frac{b}{|a| - a}$$

2) h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de Centre $O(0)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



Bon courage